1　次の放物線の方程式を求めよ。(3点×2)

(1)　焦点 $(5, 0)$、準線 $x=-5$

$y^2=4\cdot5\cdot x$

すなわち $y^2=20x$

(2)　焦点 $(0, -1)$、準線 $y=1$

$x^2=4\cdot(-1)\cdot y$

すなわち

$x^2=-4y$

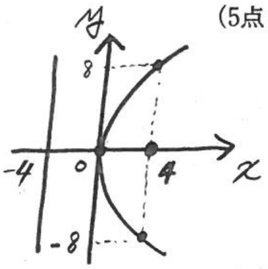
2　次の放物線の概形を描き、その焦点と準線を求めよ。(5点×2)

(1)　$y^2=16x$

$y^2=4\cdot4x$

焦点 $(4,0)$

準線 $x=-4$

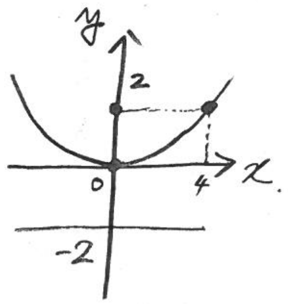


(2)　$x^2=8y$

$x^2=4\cdot2y$

焦点 $(0,2)$

準線 $y=-2$



3　次の楕円の概形を描き、その焦点の座標、長軸の長さ、短軸の長さを求めよ。(5点×2)

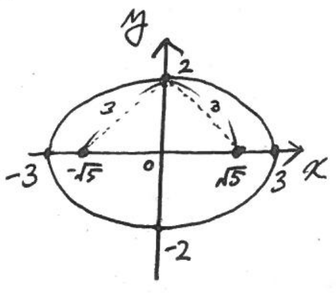
(1)　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$

焦点 $(\sqrt5,0),(-\sqrt5,0)$

長軸　6

短軸　4



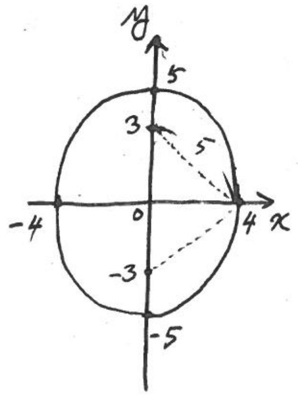
(2)　$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$

$\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{5^2}=1$

焦点 $(0,3),(0,-3)$

長軸　10

短軸　8



4　2点 $(4, 0)$, $(-4, 0)$ を焦点とし、焦点からの距離の和が10である楕円の方程式を求めよ。(5点)

求める式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とおくと. $(a>b>0)$

距離の和について.

$2a=10$　$\therefore a=5$

焦点について

$\sqrt{a^2-b^2}=4$　$\therefore b=3$

よって, 求める式は $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

5　次の双曲線の概形を描き、その焦点、頂点の座標、漸近線の方程式を求めよ。(5点×2)

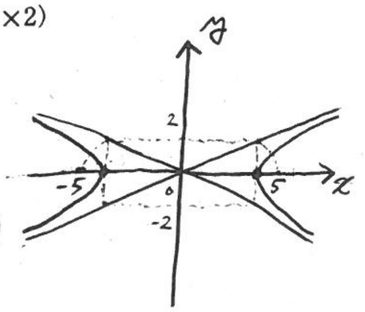
(1)　$\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{4}=1$

$\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$

焦点 $(\sqrt{29},0),(-\sqrt{29},0)$

頂点 $(5,0),(-5,0)$

漸近線 $y=\frac{2}{5}x, y=-\frac{2}{5}x$.



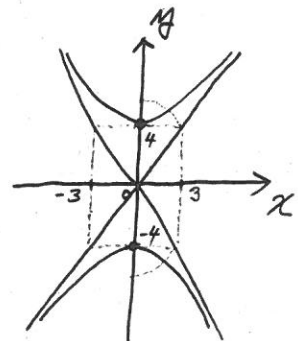
(2)　$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=-1$

$\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=-1$

焦点 $(0,5),(0,-5)$

頂点 $(0,4),(0,-4)$

漸近線 $y=\frac{4}{3}x, y=-\frac{4}{3}x$



6　次の方程式はどのような曲線を表すか答えよ。(9点)

$x^2+4y^2-4x+8y+4=0$

$x^2-4x+4y^2+8y+4=0$

$(x-2)^2-4+4(y+1)^2-4+4=0$

$(x-2)^2+4(y+1)^2=4$

$\dfrac{(x-2)^2}{4}+(y+1)^2=1$

これは楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を

x軸方向に 2, y軸方向に -1 だけ

平行移動した楕円を表す.

数学Ⅲ　単元テスト　第１章 式と曲線～第２節 媒介変数表示と極座標（＋α）　　（　）組（　）番　氏名（ 解答 ）

1　楕円 $2x^2+y^2=2$ と直線 $y=-2x+k$ が接するような定数 k の値とそのときの接点の座標を求めよ。（8点）

$\begin{cases} 2x^2+y^2=2 \\ y=-2x+k \end{cases}$ として

$2x^2+(-2x+k)^2=2$

$6x^2-4kx+k^2-2=0$ ―(＊)

これが重解をもてばよいから

$D/4=4k^2-6(k^2-2)$

$=-2k^2+12=0$

$\therefore k=\pm\sqrt{6}$

接する
⇕
重解

接点の x 座標は (＊)の解だから

$k=\sqrt{6}$ のとき、(＊)の解は $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$、このとき、$y=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$k=-\sqrt{6}$ のとき、(＊)の解は $x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$、このとき、$y=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

以上より

$k=\sqrt{6}$ のとき 接点 $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$、$k=-\sqrt{6}$ のとき 接点 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

2　媒介変数表示される次の曲線において、媒介変数を消去して、x, y の方程式で表せ。（5点×２）

(1)　$x=t+2,\ y=2t^2+1$

$\begin{cases} x=t+2 & \text{―①} \\ y=2t^2+1 & \text{―②} \end{cases}$

単純な式
⇒ "$t=$" にして
変数消去

①より $t=x-2$

②に代入して、$y=2(x-2)^2+1$

すなわち $y=2x^2-8x+9$

(2)　$x=2\cos\theta-1,\ y=2\sin\theta+2$

$\begin{cases} x=2\cos\theta-1 & \text{―①} \\ y=2\sin\theta+2 & \text{―②} \end{cases}$

$\sin\theta, \cos\theta$
⇒ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
を利用

①より $\cos\theta=\frac{x+1}{2}$、②より $\sin\theta=\frac{y-2}{2}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

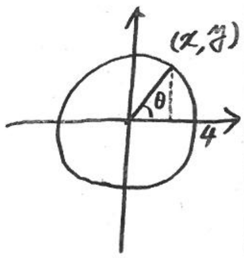
$\frac{(y-2)^2}{4}+\frac{(x+1)^2}{4}=1$

すなわち $(x+1)^2+(y-2)^2=1$

3　角 θ を媒介変数として、次の曲線を表せ。（4点×２）

(1)　円 $x^2+y^2=16$

$\begin{cases} x=4\cos\theta \\ y=4\sin\theta \end{cases}$



(2)　楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

$\begin{cases} x=5\cos\theta \\ y=3\sin\theta \end{cases}$

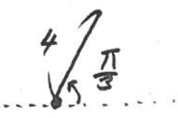
4　極座標が次のような点の直交座標を求めよ。（3点×２）

(1)　$\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$

$\left(4\cos\frac{\pi}{3}, 4\sin\frac{\pi}{3}\right)$

すなわち

$(2, 2\sqrt{3})$



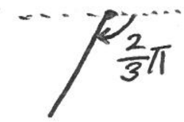
図を書いて
座標を読む

(2)　$\left(2, -\frac{2}{3}\pi\right)$

$\left(2\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right), 2\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)$

すなわち

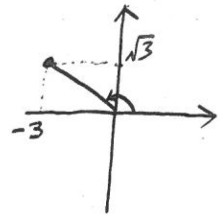
$(-1, -\sqrt{3})$



5　直交座標が次のような点の極座標を求めよ。ただし、偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。（3点×２）

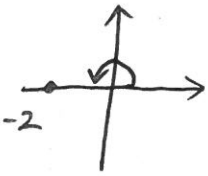
(1)　$(-3, \sqrt{3})$

$\left(2\sqrt{3}, \frac{5}{6}\pi\right)$



(2)　$(-2, 0)$

$(2, \pi)$



6　次の曲線を極方程式で表せ。（6点）

$x^2+2y^2=4$

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ として

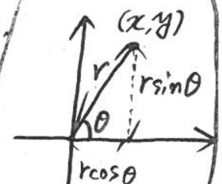
$r^2\cos^2\theta+2r^2\sin^2\theta=4$

$r^2(\cos^2\theta+2\sin^2\theta)=4$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より

$r^2(1+\sin^2\theta)=4$

座標変換



$x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$

7　次の極方程式が表す曲線を、直交座標の x, y の方程式で表せ。(6点)

$r=\cos\theta+\sin\theta$

両辺に r をかけて

$r^2=r\cos\theta+r\sin\theta$

$x=r\cos\theta$、$y=\sin\theta$、$r=\sqrt{x^2+y^2}$ より

$x^2+y^2=x+y$

すなわち

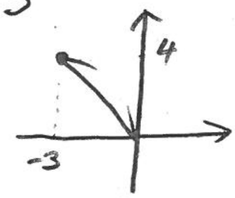
$x^2-x+y^2-y=0$

1 次の複素数の絶対値を求めよ。（３点×２）

(1)　$-3+4i$

$\sqrt{(-3)^2+4^2}$

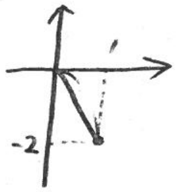
$=5$



(2)　$(1-2i)^2$

$\sqrt{1+(-2)^2}$

$=\sqrt{5}$

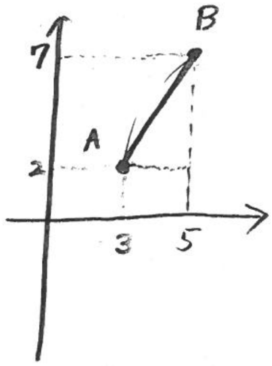


2 次の２点間の距離を求めよ。（３点）

$A(3+2i)$, $B(5+7i)$

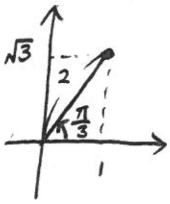
$\sqrt{(5-3)^2+(7-2)^2}$

$=\sqrt{29}$



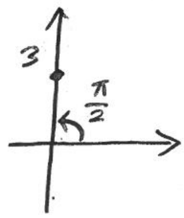
3 次の複素数を極形式で表せ。（３点×２）

(1)　$1+\sqrt{3}\,i$



$2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(2)　$3i$



$3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

4 $z=6+2i$ とするとき、点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点を表す複素数を求めよ。（９点）

$\frac{\pi}{4}$ 回転を表す複素数は

$\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

求める複素数は

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(6+2i)$

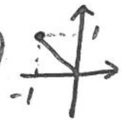
$=3\sqrt{2}+\sqrt{2}i+3\sqrt{2}i-\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$

5 次の式を計算せよ。（９点）

$(-1+i)^{12}$

$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$



であるから、ド・モアブルの定理より

$(-1+i)^{12}=(\sqrt{2})^{12}\left\{\cos\left(12\cdot\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(12\cdot\frac{3}{4}\pi\right)\right\}$

$=64(\cos 9\pi+i\sin 9\pi)$

$=64(-1+i\cdot 0)$

$=-64$

複素数の高次計算は、極形式にしてド・モアブル

6 次の方程式を解け。（９点）

$z^3=27$

この場合はもちろん $z^3-27=0$

$(z-3)(z^2+3z+9)=0$

としてもOKです。ただ、この解答の流れを修得しておきましょう

$r>0$, $0\leqq\theta<2\pi$ で

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすると、方程式は

$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=27(\cos 0+i\sin 0)$

よって、　$r^3=27$　$\therefore r=3$

$3\theta=0+2n\pi$　$\therefore \theta=\frac{2}{3}n\pi$

$0\leqq\theta<2\pi$ より　$\theta=0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

よって、$z=3(\cos 0+i\sin 0)$,

$3\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$,

$3\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$

すなわち、$z=3, \frac{-3+3\sqrt{3}i}{2}, \frac{-3-3\sqrt{3}i}{2}$

7 点 z が原点 O を中心とする半径１の円周上を動くとき、次の点 w はどのような図形を描くか。（８点）

$w=\frac{z-2}{2}$

$w=\frac{z-2}{2}$ より　$z=2(w+1)$

条件より　$|z|=1$ であるから

$|2(w+1)|=1$

$\therefore |w+1|=\frac{1}{2}$

よって、点 w は点 -1 を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円をえがく。